Prof. Amador Martin-Pizarro
Dr. Daniel Palacin

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Wintersemester 2018/2019

Bewertete Körper
Blatt 2
Abgabe: 5.11.2018

Aufgabe 1 (12 Punkte)**.**
Der Bairescher Kategoriensatz besagt, dass der Schnitt von abzählbar vielen dichten, offenen Teilmengen eines metrischen vollständigen Raumes wieder dicht ist.

Sei (X, d) ein metrischer vollständiger Raum.

(a) Zeige, dass die metrische Topologie auf X Hausdorff ist.

(b) Zeige, dass ein Element x aus X genau dann isoliert ist, wenn $X \setminus \{x\}$ nicht dicht ist.

(c) Schließe daraus, dass X überabzählbar sein muss, wenn X keine isolierten Punkte besitzt.

Sei nun $|\cdot|$ ein Absolutbetrag auf $\mathbb{Q}$ derart, dass $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ vollständig ist.

(d) Zeige, dass jeder Punkt aus $\mathbb{Q}$ isoliert ist.

(e) Zeige, dass es ein k aus $\mathbb{N}$ gibt, so dass

$$\frac{1}{k} \leq |x| \quad \text{für alle } 0 \neq x \in \mathbb{Q}$$

(f) Schließe daraus, ohne den Satz von Ostrowski zu verwenden, dass der Absolutbetrag trivial ist.
HINWEIS: Wenn $|x| > 1$, dann ist $|x^m| >> 1$ für genügend großes m.

Aufgabe 2 (8 Punkte)**.**
Sei R ein kommutativer Ring derart, dass die Kollektion von Hauptidealen von R linear geordnet bezüglich Inklusion ist.

(a) Zeige, dass jedes endlich erzeugte Ideal von R ein Hauptideal ist.

(b) Zeige, dass auch die Kollektion von Idealen von R linear geordnet bezüglich Inklusion ist.

(c) Schließe daraus, dass R genau ein maximales Ideal besitzt.

(d) Wir nehmen an, dass R ein Integritätsbereich ist. Zeige für jedes Element x aus dem Quotientenkörper K, dass x oder x^{-1} in R liegt.

Abgabe der Übungsblätter in den Briefkasten 3.29 im UG der Ernst-Zermelo-Strasse 1. Die Übungsblätter müssen bis 10 Uhr am jeweils angegebenen Abgabedatum eingeworfen werden.